

## 5. Übung zur Linearen Algebra II

**Abgabe:** Bis Mittwoch, 31.05.2006, 11:00 Uhr in die Briefkästen vor der Bibliothek.

DEFINITIONEN: Sei  $V$  ein Vektorraum und  $\alpha \in \text{End}(V)$ .

- 1) Die Dimension des Eigenraums von  $\alpha$  zum Eigenwert  $\lambda$  wird GEOMETRISCHE Vielfachheit des Eigenwertes  $\lambda$  genannt.
- 2) Der Endomorphismus  $\alpha$  heißt NILPOTENT, wenn  $\alpha^n = 0$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  ist.

**5.1** Es sei  $C^\infty(\mathbb{R})$  der Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  und  $D : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$  die durch  $f \mapsto D(f) := f'$  gegebene lineare Abbildung. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von  $D$ . Wie groß ist die geometrische Vielfachheit zu einem beliebigen Eigenwert  $\lambda$ ?

Hinweis: Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $c \in \mathbb{R}$  ist  $x \mapsto ce^{\lambda x}$  eine Funktion  $f$  in  $C^\infty(\mathbb{R})$  mit  $f' = \lambda f$ .  
(4 Punkte)

**5.2** Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der reellen Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & t-1 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von  $t \in \mathbb{R}$ . Für welche  $t$  ist  $A_t$  ähnlich zu einer Diagonalmatrix?  
(3+2 Punkte)

**5.3** Es sei  $K$  ein beliebiger Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit der endlichen Dimension  $n$ . Weiter sei  $\varphi$  ein Endomorphismus von  $V$ .

- (a) Die Summe und der Durchschnitt einer Familie  $\varphi$ -invarianter Unterräume von  $V$  sind wieder  $\varphi$ -invariante Unterräume von  $V$ .
- (b) Ist jeder Unterraum der Dimension  $n-1$  von  $V$   $\varphi$ -invariant, so gibt es ein  $\lambda \in K$  mit  $\varphi = \lambda \cdot \text{id}_V$ .  
(2+2 Punkte)

**5.4** Es sei  $V$  ein beliebiger, nicht notwendig endlich erzeugter Vektorraum, und  $f$  sei ein nilpotenter Endomorphismus von  $V$ . Zeigen Sie:

- (a) Ist  $f$  nicht die Nullabbildung, so ist  $\text{Kern}(f) \cap \text{Bild}(f) \neq \{0\}$ .
- (b) Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte von  $f$ .
- (c) Zeigen Sie, dass  $\text{id}_V + f$  bijektiv ist, und geben Sie die Inverse explizit an.  
(2+2+5 Punkte)

**Hinweis:** Die Übung am Dienstag um 17 Uhr (Gruppe 6) kann leider nicht mehr stattfinden. Die Teilnehmer aus Gruppe 6 werden gebeten eine andere Übungsgruppe zu besuchen.