Universität Würzburg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Peter Müller
Dr. Peter Fleischmann

SS 2006
02.05.2006

2. Übung zur Linearen Algebra II

Abgabe: Bis Mittwoch, 10.05.2006, 12:00 Uhr in die Briefkästen vor der Bibliothek.

2.1 Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ eine 2×2-Matrix über dem Körper K. (Für (b)–(e) gelte $K = \mathbb{R}$.) Zeigen Sie:

(a) Das charakteristische Polynom $\chi_A(x)$ von A ist $x^2 - \operatorname{sp}(A)x + \det(A)$.

(b) Das charakteristische Polynom $\chi_A(x)$ hat die Nullstellen

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[(a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}\right].$$

(c) A besitzt

(i) für $(a-d)^2 + 4bc > 0$ zwei verschiedene reelle Eigenwerte,

(ii) für $(a-d)^2 + 4bc = 0$ einen reellen Eigenwert,

(iii) für $(a-d)^2 + 4bc < 0$ keinen reellen Eigenwert besitzt.

(d) Bestimmen Sie für $(a-d)^2 + 4bc > 0$ die Eigenvektoren der Matrix A.

(e) Sind $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ und gilt $a + b = c + d$, so sind die Eigenwerte ganzzahlig.

(1+1+2+2+1 Punkte)

2.2 Zeigen Sie mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes, dass für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\det\begin{pmatrix} x & y & 0 & 1 \\ -y & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & x & -y \\ -1 & 0 & y & x \end{pmatrix} = (x^2 + y^2 + 1)^2.$$

(5 Punkte)

2.3 Bestimmen Sie mit dem euklidischen Algorithmus das normierte erzeugende Element der folgenden Ideale in $\mathbb{Q}[x]$:

(a) $(x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1\ ,\ x^4 + 3x^2 + 2)$,

(b) $(x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2\ ,\ x^4 + x^3 - 4x^2 + 2x\ ,\ x^5 + 2x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 2)$.

(2+4 Punkte)

2.4 Zeigen Sie, dass die Erzeuger eines Ideals von $K[x]$ bis auf einen Faktor $c \in K \setminus \{0\}$ eindeutig sind.

(3 Punkte)

Die ersten Übungen finden am 8./9. Mai statt.

¡¿ Zu den Übungen angemeldet ?!

www.mathematik.uni-wuerzburg.de/uebungsanmeldung