Universität Würzburg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Peter Müller
Dr. Peter Fleischmann

SS 2006
30.05.2006

6. Übung zur Linearen Algebra II

Abgabe: Bis Mittwoch, **14.06.2006**, 11:00 Uhr in die Briefkästen vor der Bibliothek.

6.1 Sei die folgende Matrix gegeben.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.
(b) Welche Eigenwerte hat A?
(c) Geben Sie eine maximale Menge von linear unabhängigen Eigenvektoren von A an. Im folgenden seien die hier gefundenen Eigenvektoren mit $v_1, v_2, \ldots$ bezeichnet.
(d) Bestimmen Sie für den Eigenwert λ den Defekt $d_i := \dim \operatorname{Kern}(A - \lambda E)^i$ für $0 \leq i \leq 5$.
(e) Bestimmen Sie $s_i = 2d_i - d_{i-1} - d_{i+1}$ für $1 \leq i \leq 4$. (Die s_i geben die Anzahl der Jordanblöcke der Größe i an.)
(f) Bestimmen Sie, soweit möglich, zu jedem Eigenvektor v_i aus (c) eine Kette von sogenannten Hauptvektoren $w_{i,j}$ mit

$$w_{i,1} = v_i \quad \text{und} \quad w_{i,j} = (A - \lambda E)w_{i,j+1} \text{ für } j \geq 1.$$

(g) Sei $T = (w_{1,1}, w_{i,2}, \ldots, w_{2,1}, w_{2,2}, \ldots, w_{i,1}, \ldots)$ die aus den $w_{i,j}$ als Spalten gebildeten Matrix. Bestimmen Sie die Inverse von T und berechnen Sie $T^{-1}AT$.
(h) Geben Sie die Jordan-Normalform von A an.
(i) Geben Sie das Minimalpolynom von A an.

(3+1+4+4+1+5+3+1+2+1=25 Punkte)

6.2 Sei V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum und $\varphi \in \operatorname{Aut}(V)$ mit $\varphi^n = \mathrm{id}$ für ein $n \geq 1$. Zeigen Sie:
Es gibt eine Zerlegung $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ mit $\varphi|_{V_j} : V_j \to V_j$ und $\varphi(v) = e^{j\frac{2\pi i}{n}} v$ für $v \in V_j$.

(5 Punkte)

6.3 Zeigen Sie, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & e & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 4 & \pi & 0 & 4 & 6 \\ 6 & 5 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

einen reellen Eigenwert besitzt, wobei e die Euler'sche Zahl und π die Kreiszahl bezeichnet. (2 Punkte)

6.4 Sei A, B quadratische Matrizen mit $AB = BA$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i B^{n-i}$.

(b) Ist B nilpotent mit $B^m = 0$, so gilt für $n \geq m$:

$$(A+B)^n = A^{n-m+1}(A+B)^{m-1}.$$

(3+2 Punkte)

6.5 Zeigen Sie, dass jede quadratische Matrix A ähnlich zu ihrer Transponierten A^T ist. (5 Punkte)

Lösung 6.1

(a) Entwicklung nach der ersten und den letzten 4 Zeilen ergibt:

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} \boxed{x-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & x-3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & x-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & x-2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{x-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{x-2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{x-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{x-2} \end{vmatrix} \\
&= (x-2)^5 \begin{vmatrix} x-3 & 1 & 0 \\ -1 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} \\
&= (x-2)^5(x-2)[(x-3)(x-1)+1] = (x-2)^8.
\end{aligned}$$

(b) Wegen $\chi_A(x) = (x-2)^8$ ist 2 einziger Eigenwert von A.

(c) Die gesuchten Eigenvektoren spannen $\mathrm{Kern}(A-2E)$ auf. Zeilenumformungen ändern den Kern nicht. Daher gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Kern}(A-2E) &= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \langle v_1 = e_2 + e_3,\ v_2 = e_5 + e_8,\ v_3 = e_4,\ v_4 = e_6 \rangle
\end{aligned}$$

(d) Sei $B = (A - 2E)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
B^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
B^3 &= 0
\end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
d_0 &= \dim(\mathrm{Kern}(B^0)) = \dim(\mathrm{Kern}(E)) = 0 \\
d_1 &= \dim(\mathrm{Kern}(B)) = 4 \\
d_2 &= \dim(\mathrm{Kern}(B^2)) = 7 \\
d_3 &= d_4 = d_5 = \dim(\mathrm{Kern}(B^3)) = \dim(\mathrm{Kern}(0)) = 8.
\end{aligned}$$

(e) Weiter gilt dann

$$\begin{aligned}
s_1 &= 2d_1 - d_0 - d_2 = 2 \cdot 4 - 0 - 7 = 1 \\
s_2 &= 2d_2 - d_1 - d_3 = 2 \cdot 7 - 4 - 8 = 2 \\
s_3 &= 2d_3 - d_2 - d_4 = 2 \cdot 8 - 7 - 8 = 1 \\
s_4 &= 2d_4 - d_3 - d_5 = 2 \cdot 8 - 8 - 8 = 0
\end{aligned}$$

(f) Sowieso gilt

$$\begin{aligned}
w_{11} &= v_1 = e_2 + e_3 \\
w_{21} &= v_2 = e_5 + e_8 \\
w_{31} &= v_3 = e_4 \\
w_{41} &= v_4 = e_6
\end{aligned}$$

Gesucht wird nur jeweils eine spezielle Lösung von $Bw_{i2} = w_{i1}$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Also

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{12} & w_{22} & w_{32} & w_{42} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wie man leicht erkennen kann, ist $Bw_{22} = w_{21}$ nicht lösbar. Die restlichen Lösungen sind z.B.

$$w_{12} = e_2 \qquad w_{32} = e_5 \qquad w_{42} = e_3 + e_7 - e8.$$

Nun wird jeweils eine spezielle Lösung von $Bw_{i3} = w_{i2}$ für $i \in \{1, 3, 4\}$ gesucht. Also

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{13} & w_{33} & w_{43} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wiederum erkennt man sofort, dass $Bw_{i3} = w_{i2}$ für $i \in \{3, 4\}$ keine Lösung besitzt. Eine Lösung für $Bw_{13} = w_{12}$ ist zum Beispiel

$$w_{13} = e_1 - e_2 - e_5.$$

Somit erhält man

$$\begin{array}{llll} w_{11} = e_2 + e_3 & w_{21} = e_5 + e_8 & w_{31} = e_4 & w_{41} = e_6 \\ w_{12} = e_2 & & w_{32} = e_5 & w_{42} = e_3 + e_7 - e8 \\ w_{13} = e_1 - e_2 - e_5 & & & \end{array}$$

(g) Somit ist

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmung der Inversen von T :

$$\left(\begin{array}{cccccccc|cccccccc}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc|cccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc|cccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)$$

Somit ist

$$T^{-1} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

und es gilt

$$
\begin{aligned}
T^{-1}AT &= T^{-1}\begin{pmatrix}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2
\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(h) Die Jordan-Normalform ist das Ergebnis von $T^{-1}AT$, also

$$
\begin{pmatrix}
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{pmatrix}.
$$

Die Lösungen aus Teilaufgabe (e) führen zum selben Ergebnis. Die Reihenfolge der Blöcke ist dabei irrelevant.

(i) Aus der Jordannormalform kann man das Minimalpolynom direkt ablesen. Die Vielfachheit der Nullstelle 2 im Minimalpolynom entspricht der Größe des größten Blocks, ist also 3. Somit ist das Minimalpolynom

$$m(x) = (x-2)^3.$$

Lösung 6.2

Das Minimalpolynom von φ ist $x^n - 1$ und zerfällt (im komplexen) in paarweise verschiedene Linearfaktoren.

$$x^n - 1 = \prod_{j=1}^{n}(x-\zeta_j) \text{ mit } \zeta_j = e^{j\frac{2\pi i}{n}}.$$

Seien $V_j = \mathrm{Kern}(\varphi - \zeta_j \,\mathrm{id})$ für $1 \leq j \leq n$ die Eigenräume zu den Eigenwerten ζ_j.

Weiter ist φ diagonalisierbar, d.h. es gibt eine Basis aus Eigenvektoren und die Eigenräume erzeugen ganz V.
Da die Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten disjunkt sind, ist die Summe der Eingenräume direkt, d.h. es gilt $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$.

Lösung 6.3
Das charakteristische Polynom hat Grad 5 und damit mindestens eine reelle Nullstelle, also besitzt die Matrix einen reellen Eigenwert.

Lösung 6.4

(a) Beweis durch Induktion: Es gilt $(A+B)^1 = \binom{1}{0}A^0B + \binom{1}{1}AB^0 = B + A$.
Weiter ist

$$\begin{aligned}
(A+B)^{n+1} &= (A+B)(A+B)^n \\
&= (A+B)\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}A^iB^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}AA^iB^{n-i} + \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}BA^iB^{n-i} \\
&\overset{AB=BA}{=} \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}A^{i+1}B^{n-i} + \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}A^iB^{(n+1)-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}A^iB^{(n+1)-i} + \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}A^iB^{(n+1)-i} \\
&= A^{n+1} + B^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\left[\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}\right]A^iB^{(n+1)-i} \\
&= A^{n+1} + B^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}A^iB^{(n+1)-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n}{i}A^iB^{(n+1)-i}
\end{aligned}$$

(b) Die Behauptung ist falsch. Es gilt nach (a):

$$\begin{aligned}
(A+B)^n &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}A^iB^{n-i} \\
&= \sum_{i=n-m+1}^{n}\binom{n}{i}A^iB^{n-i} \\
&= A^{n-m+1}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{n}{i+n-m+1}A^iB^{n-i}.
\end{aligned}$$

Lösung 6.5
Die Matrix A ist ähnlich zu ihrer Normalform $N = S^{-1}AS$. Dabei hat N die folgende Block-Struktur

$$N = \begin{pmatrix} \boxed{N_1} & & & 0 \\ & \boxed{N_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{N_r} \end{pmatrix}$$

Dabei ist für jedes N_i das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom gleich, d.h $\chi_{N_i}(x) = m_{N_i}(x)$ für $1 \leq i \leq r$.

Die transponierte Matrix N_i^T hat dasselbe charakteristische Polynom und auch Minimalpolynom. Nach einem Satz der Vorlesung ist dann N_i ähnlich zu N_i^T und somit ist N ähnlich zu N^T. Somit gibt es ein T mit $N^T = T^{-1}NT$.
Weiter ist N^T ähnlich zu A^T mittels $A^T = (SNS^{-1})^T = (S^{-1})^T N^T S^T$.
Somit gilt

$$\begin{aligned} A^T &= (S^{-1})^T N^T S^T \\ &= (S^{-1})^T T^{-1} N T S^T \\ &= (S^{-1})^T T^{-1} S^{-1} A S T S^T \\ &= (STS^T)^{-1} A (STS^T) \end{aligned}$$

und A ist ähnlich zu A^T.

Hinweis

Wegen den Pfingsferien findet am 6.Juni (Pfingsdienstag) keine Vorlesung und keine Übungen statt. Die Abgabe dieses Blattes ist daher erst am Mittwoch, den 14.Juni.

Wir wünschen Ihnen Schöne Pfingsten!

Klausurtermin

Am **Mittwoch, den 19. Juli von 15^{00} – 17^{30} Uhr**
findet die Klausur im Zuse-HS und in HS 1 (Max-Scheer-HS) statt.