

7. Übung zur Linearen Algebra I

Abgabe: Bis Mittwoch, 14.12.2005, 12:00 Uhr in die Briefkästen vor der Bibliothek.

7.1 Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis eines K -Vektorraums V , und sei $f : V \rightarrow W$ eine K -lineare Abbildung von V in einen K -Vektorraum W . Dann ist f eindeutig bestimmt durch die n Vektoren $w_1 = f(v_1), \dots, w_n = f(v_n)$ aus W . Zeigen Sie:

- (a) f ist injektiv $\iff \{w_1, \dots, w_n\}$ sind linear unabhängig in W .
 - (b) f ist surjektiv $\iff \{w_1, \dots, w_n\}$ bilden ein Erzeugendensystem von W .
- (3+3 Punkte)

7.2 (Dedekindsches Modulgesetz)

Seien U, W, Z Unterräume eines Vektorraums V . Weiter sei $U \subseteq Z$.
Zeigen Sie:

- (a) Es gilt

$$(U + W) \cap Z = U + (W \cap Z).$$

- (b) Auf die Voraussetzung $U \subseteq Z$ in (a) kann nicht verzichtet werden.

(3+1 Punkte)

7.3 Sei f eine von der Nullfunktion verschiedene reellwertige auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion, die $f(x+1) = f(x)$ erfüllt. Zeigen Sie:

Die Menge der Funktionen $\{x, x^2, f(x)\}$ ist linear unabhängig als Menge von Vektoren des Vektorraums $V := \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$.

(6 Punkte)

7.4 Es sei V ein Vektorraum und $U \subset V$ ein echter Unterraum. Zeigen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt mit $\mathcal{B} \cap U = \emptyset$.

(4 Punkte)