

4. Übung zur Linearen Algebra I

Abgabe: Bis Mittwoch, 23.11.2005, 12:00 Uhr in die Briefkästen vor der Bibliothek.

4.1 Sei G eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0 und $\mathbb{H} = \{f : G \rightarrow G \mid f \text{ Gruppen-Homomorphismus}\}$ die Menge der homomorphen Abbildungen von G in G . (Diese Abbildungen heißen auch Endomorphismen.) Sei weiter $\mathbf{0}$ der Nullhomomorphismus ($\mathbf{0}(g) = 0$ für alle $g \in G$) und $\mathbf{1}$ die Identität ($\mathbf{1}(g) = g$ für alle $g \in G$). Auf $\mathbb{H}$ seien die Verknüpfungen $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ und $(f \cdot g)(x) = f(g(x))$ definiert.

Zeigen Sie:

- (a) $\mathbb{H}$ mit obigen Verknüpfungen bildet einen Ring, den sogenannten Endomorphismenring.
 - (b) Bleibt die Ringeigenschaft von $\mathbb{H}$ bestehen, wenn G nicht kommutativ ist?
- (4+2 Punkte)

4.2 Zeigen Sie, dass für $n \geq 2$ die Symmetrische Gruppe S_n die doppelte Mächtigkeit der alternierenden Gruppe A_n besitzt.

(4 Punkte)

4.3 Sei $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[a] = a + n\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ ein Restklassenring. Zeigen Sie:
Ist n keine Primzahl, so gibt es Elemente $[a], [b] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus \{[0]\}$ mit $[a] \cdot [b] = [0]$.
(Solche Ringelemente werden Nullteiler genannt.)

(3 Punkte)

Hinweis: Bei der Verknüpfung von Permutation soll von rechts nach links gerechnet werden, z.B. gilt $(1\ 2) \cdot (2\ 3) = (1\ 2\ 3)$.

4.4 Seien $\pi, \sigma, \rho \in S_4$ mit

$$\pi = (1\ 2\ 3\ 4) \cdot (2\ 3) \quad \sigma = (1\ 4) \cdot (2\ 3) \cdot (1\ 2) \quad \rho = (1\ 2\ 4).$$

- (a) Geben Sie π und σ als Produkt von disjunkten Zyklen an.
- (b) Geben Sie die folgenden Produkte als Produkte von disjunkten Zyklen an. Bestimmen Sie jeweils, ob es sich um eine gerade oder ungerade Permutation handelt.

$$(i) \quad \pi \cdot \sigma, \quad (ii) \quad \rho \cdot \pi, \quad (iii) \quad \rho \cdot \sigma \cdot \rho, \quad (iv) \quad \sigma \cdot \pi \cdot \rho.$$

(2+6 Punkte)