

1. Übungsblatt zur Differentialgeometrie I

(Abgabe am 31.10.2007 vor den Übungen)

Aufgabe 1.

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$.

- a) Zeigen Sie: Durch $c(t) := (f(t), f(-t), t)^T$ wird eine C^∞ -Kurve im $\mathbb{R}^3$ definiert. Skizzieren Sie diese.
- b) Bestimmen Sie ihre Wendepunkte.
- c) Zeigen Sie: Die dritten Schmiegräume sind überall degeneriert. Nennen Sie eine in der Vorlesung behandelte hinreichende Bedingung, damit eine C^3 -Kurve im $\mathbb{R}^3$, deren dritte Schmiegräume überall degeneriert sind, eben verläuft. Ist diese Bedingung hier erfüllt?

Aufgabe 2.

Sei $t \mapsto c(t)$ eine reguläre parametrisierte C^1 -Kurve im $\mathbb{R}^n$ und t_0 ein fester Parameterwert. Zeigen Sie:

- a) Wenn die Kurve nicht durch den Nullpunkt verläuft, aber $c(t_0)$ dem Ursprung am nächsten ist, so ist der Tangentenvektor $\dot{c}(t_0)$ orthogonal zum Ortsvektor $c(t_0)$.
- b) Ist $\dot{c}(t)$ orthogonal zu einem festen Vektor X für alle Parameter t und $c(t_0)$ orthogonal zu X , so ist $c(t)$ orthogonal zu X für alle t .

Aufgabe 3.

Bei einer ebenen C^2 -Kurve in Bogenlängenparametrisierung $s \in I \subset \mathbb{R} \mapsto c(s) \in \mathbb{R}^2$ definiert man neben dem *Tangentenvektor* $T := c'$ den *Normalenvektor* durch $N := T^\times$ (mit dem 2-dim. Vektorprodukt $\times$) sowie die *orientierte Krümmung* durch $k := \det(T, T')$.

- a) Zeigen Sie: (T, N) bilden eine orthonormierte, positiv orientierte Begleitbasis der Kurve und es gelten die Ableitungsgleichungen $T' = kN$, $N' = -kT$.
- b) Bestimmen Sie die orientierte Krümmung eines Kreises vom Radius $r > 0$, der einmal im positiven Sinn bzw. einmal im negativen Sinn durchlaufen wird.
- c) Vergleichen Sie die orientierte Krümmung k mit der (Raum-)Krümmung $\kappa := |T'(s)|$, die man erhält wenn man die Kurve etwa in der Form $s \mapsto c(s) = (c^1(s), c^2(s), 0)$ als Raumkurve auffasst.

Aufgabe 4.

Im $\mathbb{R}^2$ rollt eine Kreisscheibe mit Radius 1 entlang der x-Achse. Die dabei von einem Punkt auf dem Umfang der Kreisscheibe durchlaufene Kurve heißt *Zykloide*.

- a) Skizzieren Sie die Kurve.
- b) Geben Sie eine Parametrisierung der Zykloide an und bestimmen Sie ihre singulären Punkte.
- c) Berechnen Sie die Bogenlänge eines Teilstücks, das einer vollständigen Umdrehung der Kreisscheibe entspricht.

Hinweise zur Veranstaltung:

Um einen Übungsschein zu erwerben muss die Klausur am Ende des Semesters bestanden werden. Eine Zulassung zur Klausur erhält, wer insgesamt mindestens 50% der Punkte aller Übungsaufgaben erreicht.

Da es nur einen Korrektor gibt, müssen zwei und dürfen drei Übungsteilnehmer gemeinsam abgeben.