Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Ralf Winkler

Würzburg, den 19. Juni 2007

7. Übung zur Analysis IV (DGL)

Sommersemester 2007
Lösungshinweise

29.) a.) Es seien $x \mapsto y_i(x)$ und $x \mapsto \tilde{y}_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ die Spalten der beiden Wronksi-Matrizen. Da es sich hierbei um Lösungen des Systems $y' = A(x)y$ handelt, gilt aufgrund des Eindeutigkeitssatzes

$$\exists_{x \in I}\, Y(x) = \tilde{Y}(x) \quad \Leftrightarrow \quad \exists_{x \in I}\, \forall_{i=1,\ldots,n}\, y_i(x) = \tilde{y}_i(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{x \in I}\, \forall_{i=1,\ldots,n}\, y_i(x) = \tilde{y}_i(x)\,,$$

also $Y = \tilde{Y}$.

b.) Es seien $x \in I \mapsto y_{ij}(x)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ die Einträge der Wronski-Matrix und $x \mapsto a_{ij}(x)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ die Einträge der Systemmatrix $x \mapsto A(x)$. Dann ist für $x \in I$

$$\begin{aligned} w'(x) &= \frac{d}{dx} \det Y(x) = \frac{d}{dx}\left[\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi\, y_{1\pi(1)}(x) \cdot \ldots \cdot y_{n\pi(n)}(x)\right] \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi\, y'_{1\pi(1)}(x) \cdot \ldots \cdot y_{n\pi(n)}(x) + \ldots + \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi\, y_{1\pi(1)}(x) \cdot \ldots \cdot y'_{n\pi(n)}(x)\,. \end{aligned}$$

Wegen $y_i' = Ay_i$ bzw. komponentenweise $y'_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{jl} y_{il}$ für $i, j = 1, \ldots, n$ gilt demnach

$$\begin{aligned} w'(x) &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \left(\sum_{l=1}^n a_{\pi(1)l}(x) y_{1l}(x)\right) y_{2\pi(2)}(x) \cdot y_{n\pi(n)}(x) \\ &+ \ldots + \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi\, y_{1\pi(1)}(x) \cdot \ldots \cdot y_{n-1,\pi(n-1)}(x) \cdot \left(\sum_{l=1}^n a_{\pi(n)l}(x) y_{nl}(x)\right)\,. \end{aligned}$$

und da mit l für jedes $\pi \in S_n$ auch $\pi(l)$ die Werte von 1 bis n durchläuft

$$\begin{aligned} w'(x) &= \sum_{l=1}^n \sum_{\pi \in S_n} \sum_{i=1}^n \operatorname{sgn}\pi \cdot a_{\pi(i)\pi(l)}(x) y_{1\pi(1)}(x) \cdot \ldots \cdot y_{i-1,\pi(i-1)}(x) \cdot y_{i\pi(l)}(x) \\ &\qquad \cdot y_{i+1,\pi(i+1)}(x) \cdot \ldots \cdot y_{n\pi(n)}(x). \end{aligned}$$

Betrachten wir das Indextripel (l, π, i) mit $l \neq i$, oBdA $i < l$ und den dazugehörigen Summanden

$$S_{i,\pi,l}(x) := \operatorname{sgn} \pi \cdot a_{\pi(i)\pi(l)}(x) y_{1\pi(1)}(x) \cdot \ldots \cdot y_{i-1,\pi(i-1)}(x) \cdot y_{i\pi(l)}(x) \cdot y_{i+1,\pi(i+1)}(x) \cdot \ldots \cdot y_{n\pi(n)}(x).$$

Für $\tilde{\pi} := (i\, l) \circ \pi$ gilt $\operatorname{sgn}(\tilde{\pi}) = -\operatorname{sgn}(\pi)$ und es ist

$$\begin{aligned} S_{l,\tilde{\pi},i}(x) &= \operatorname{sgn} \tilde{\pi} \cdot a_{\tilde{\pi}(l)\tilde{\pi}(i)}(x) y_{1\tilde{\pi}(1)}(x) \cdot \ldots \cdot y_{i\tilde{\pi}(i)}(x) \cdot \ldots \cdot y_{l-1,\tilde{\pi}(l-1)}(x) \cdot y_{l\tilde{\pi}(i)}(x) \\ &\qquad \cdot y_{l+1,\tilde{\pi}(l+1)}(x) \cdot \ldots \cdot y_{n\tilde{\pi}(n)}(x) \\ &= -\operatorname{sgn} \pi \cdot a_{\pi(i)\pi(l)}(x) y_{1\pi(1)}(x) \cdot \ldots \cdot y_{i\pi(l)}(x) \cdot \ldots \cdot y_{l-1,\pi(l-1)}(x) \cdot y_{l\pi(l)}(x) \\ &\qquad \cdot y_{l+1,\pi(l+1)}(x) \cdot \ldots \cdot y_{n\pi(n)}(x) = -S_{i,\pi,l}(x)\,. \end{aligned}$$

Somit reduzieren sich die Summanden $S_{i,\pi,l}(x)$ und $S_{l,\tilde{\pi},i}(x)$ zu Null und es ist

$$\begin{aligned} w'(x) &= \sum_{l=1}^{n} \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot a_{\pi(l)\pi(l)}(x) y_{1\pi(1)}(x) \cdot \ldots \cdot y_{n\pi(n)}(x) \\ &= \sum_{\pi \in S_n} (a_{\pi(1)\pi(1)} + \ldots + a_{\pi(n)\pi(n)})(x)\, y_{1\pi(1)}(x) \cdot \ldots \cdot y_{n\pi(n)}(x) \;=\; \operatorname{spur} A(x) w(x)\,. \end{aligned}$$

30.) In den Übungen haben wir gezeigt: Es ist

$$\begin{pmatrix} e^{x^2} & \frac{e^{x^2-3x}}{9}(-3x+2) \\ -e^{x^2} & \frac{e^{x^2-3x}}{9}(3x+7) \end{pmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix des homogenen Systems. Zur Lösung der inhomogenen Gleichung berechnen wir die Lösung des LGS

$$\begin{aligned} Y(x) \cdot c(x) = \begin{pmatrix} xe^{x^2} \\ -e^{x^2} \end{pmatrix} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{e^{-3x}}{9}(-3x+2) \\ -1 & \frac{e^{-3x}}{9}(3x+7) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{e^{-3x}}{9}(-3x+2) & \vdots & x \\ 0 & e^{-3x} & \vdots & x-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

zu $c_2(x) = (x-1)e^{3x} \;\Rightarrow\; c_1(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{4x}{9} + \frac{2}{9}$. Also ist (wieder nach partieller Integration)

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} e^{x^2} & \frac{e^{x^2-3x}}{9}(-3x+2) \\ -e^{x^2} & \frac{e^{x^2-3x}}{9}(3x+7) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x^3}{9} + \frac{2x^2}{9} + \frac{2x}{9} \\ \frac{e^{3x}}{3}(x - \frac{4}{3}) \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} e^{x^2}\left(\frac{x^3}{9} + \frac{2x^2}{9} + \frac{2x}{9}\right) + \frac{1}{27}(-3x+2)(x-\frac{4}{3})e^{x^2} \\ -e^{x^2}\left(\frac{x^3}{9} + \frac{2x^2}{9} + \frac{2x}{9}\right) + \frac{1}{27}(3x+7)(x-\frac{4}{3})e^{x^2} \end{pmatrix} = e^{x^2} \begin{pmatrix} \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{9} + \frac{4x}{9} - \frac{8}{81} \\ -\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{9} - \frac{x}{9} - \frac{28}{81} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine partikuläre Lösung und

$$x \mapsto c_1 \begin{pmatrix} e^{x^2} \\ -e^{x^2} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{e^{x^2-3x}}{9}(-3x+2) \\ \frac{e^{x^2-3x}}{9}(3x+7) \end{pmatrix} + e^{x^2} \begin{pmatrix} \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{9} + \frac{4x}{9} - \frac{8}{81} \\ -\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{9} - \frac{x}{9} - \frac{28}{81} \end{pmatrix}$$

die allgemeine Lösung des Systems.