Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Ralf Winkler

Würzburg, den 6. Dezember 2006

8. Übung zur Analysis III

Wintersemester 2006/07

32.) **(5 Punkte)** Die Gammafunktion $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ sei erklärt durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt\,.$$

Zeigen Sie:

a.) $\Gamma(x)$ existiert für alle $x > 0$.

b.) Es ist $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für alle $x > 0$.

c.) Es ist $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Hinweis zu a.) Betrachten Sie im Falle $x < 1$ gesondert die Intervalle $[0,1]$ und $[1,\infty[$. Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass ein zu Aufgabe 47 (Analysis II) analoges Majorantenkriterium auch für unbeschränkte Funktionen auf beschränkten Intervallen gilt.

33.) **(3 Punkte)** Es sei B der von den Kurven $x^2 + y^2 = 1$ und $xy = \frac{2}{5}$ in der oberen Halbebene $y > 0$ umschlossene Bereich. Berechnen Sie

$$\int_B xy\, d(x,y)\,.$$

34.) **(4 Punkte)** Der Zylinder mit elliptischer Grundfläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \qquad (a,b > 0)$$

stehe senkrecht auf der $x-y$-Ebene und werde durch die Ebene

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma$$

abgeschnitten. Wie groß ist das Volumen des so entstehenden Körpers?

35.) **(4 Punkte)** Es sei B der Bereich, der vom Graphen des Zykloidenbogens

$$t \in [0,2\pi] \mapsto (x(t),y(t)) := (a(t-\sin t), a(1-\cos t)) \in \mathbb{R}^2 \qquad (a > 0)$$

und der x-Achse eingeschlossen wird. Berechnen Sie den Inhalt $\mu(B)$ sowie das Integral

$$\int_B xy\, d(x,y)\,.$$

36.) **(4 Punkte)** Es sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte, J-messbare Menge und $h > 0$. Dann nennt man die Menge

$$C = \{((1-\lambda)x, \lambda h) : x \in B,\ 0 \le \lambda \le 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

den **Kegel** über B mit Spitze in $(0,h)$. Ferner sei

$$C_t = \{y \in \mathbb{R}^n : (y,t) \in C\}$$

der Schnitt durch den Kegel auf der Höhe $t \in [0,h]$.

a.) Skizzieren Sie im Falle $n = 1$ einen solchen Kegel C sowie einen Schnitt C_t $(t \in [0,h])$.

b.) Berechnen Sie $\mu(C_t)$ und $\mu(C)$.

37.) **(4 Punkte)** Berechnen Sie:

$$\int_1^2 \left(\int_{\sqrt{x}}^x \sin\frac{\pi x}{2y}\, dy \right) dx + \int_2^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^2 \sin\frac{\pi x}{2y}\, dy \right) dx\,.$$

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis spätestens Mittwoch, den 13. Dezember, **12:00 Uhr**, in die richtigen Briefkästen neben der Mathe/Info-Teilbibliothek.