Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Ralf Winkler

Würzburg, den 29. November 2006

7. Übung zur Analysis III

Wintersemester 2006/07

28.) **(4 Punkte)** Bestimmen Sie für $a > 0$ Stammfunktionen zu

$$y \in \mathbb{R} \mapsto f(y) = a^y \qquad \text{und} \qquad x \in \mathbb{R}^+ \mapsto g(x) = x^a\,.$$

Begründen Sie, warum das R-Integral

$$\int_0^1 \frac{x^3 - x}{\log x}\, dx$$

existiert und berechnen Sie seinen Wert mit Hilfe der oben ermittelten Stammfunktionen.

29.) **(4 Punkte)** Es seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Mengen. Zeigen Sie für das äußere und innere Jordan-Maß:

a.) $\overline{\mu}(A \cup B) \;\leq\; \overline{\mu}(A) + \overline{\mu}(B)$,

b.) $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \underline{\mu}(A \cup B) \;\geq\; \underline{\mu}(A) + \underline{\mu}(B)$.

Es seien nun A und B messbar. Zeigen Sie, dass dann auch $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \backslash B$ Jordan-messbar sind mit

a.) $A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mu(B \backslash A) \;=\; \mu(B) - \mu(A)$,

b.) $\mu(A \cup B) \;=\; \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

30.) **(4 Punkte)**

a.) Gegeben seien $M \subset \mathbb{R}^n$ sowie zwei Folgen $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ J-messbarer Mengen mit $C_k \subset M \subset D_k$ und $\mu(D_k \backslash C_k) \to 0$. Zeigen Sie, dass dann M ebenfalls J-messbar ist.

b.) Die Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ sei J-messbar. Zeigen Sie, dass dann für jedes $r > 0$ auch die Menge

$$rB \;:=\; \{rx \,|\, x \in B\}$$

J-messbar ist mit $\mu(rB) = r^n \mu(B)$.

31.) **(5 Punkte)**

a.) Zeigen Sie, dass für jede Matrix $A \in M(m \times m; \mathbb{R})$ die Matrixexponentialreihe

$$x \in \mathbb{R} \;\mapsto\; Y(x) := e^{Ax} \;:=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k x^k \;\in\; M(m \times m; \mathbb{R})$$

konvergiert.

Hinweis: Verwenden Sie die Operatornorm und beachten Sie, dass $A^0 = E$ und $M(m \times m; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{m^2}$.

b.) Beweisen Sie, dass $x \mapsto Y(x)$ eine normierte Fundamentalmatrix des Systems $y' = A \cdot y$ ist, d.h. es gilt

$$Y' = A \cdot Y, \quad Y(0) = E\,.$$

c.) Formulieren Sie die Lösung des AWPs $y' = Ay,\; y(0) = y_0$ mit Hilfe dieser Fundamentalmatrix.

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis spätestens Mittwoch, den 6. Dezember, **12:00 Uhr**, in die richtigen Briefkästen neben der Mathe/Info-Teilbibliothek.