Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Ralf Winkler

Würzburg, den 25. Oktober 2006

2. Übung zur Analysis III

Wintersemester 2006/07

6.) **(3 Punkte)** Untersuchen Sie die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) := (e^{x+y} - e^{x-y} - a^2 x, \;\; x+y) \quad (a \in \mathbb{R})$$

auf lokale Invertierbarkeit. Ist f auf ganz $\mathbb{R}^2$ injektiv?

7.) **(4 Punkte)** Zeigen Sie zunächst **ohne** die Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel die Existenz eines Minimums der Funktion

$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) := y+z$$

unter den Nebenbedingungen

$$F_1(x,y,z) = x^6 - z = 0, \qquad F_2(x,y,z) = y^3 - z = 0\,.$$

Wo wird das Minimum angenommen? Versuchen Sie dann, mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenregel dieses Minimum zu bestimmen. Was fällt auf und woran liegt dies?

8.) **(4 Punkte)**

a.) Es sei $R =]a,b[\times]c,d[$ ein nichtentartetes Rechteck des $\mathbb{R}^2$ und $f,g : R \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f_y = g_x$. Zeigen Sie, dass dann

$$U : R \to \mathbb{R}, \quad U(x,y) = \int_{\mathring{a}}^{x} f(\xi, \mathring{b})\, d\xi + \int_{\mathring{b}}^{y} g(x,\eta)\, d\eta$$

mit beliebigem $(\mathring{a}, \mathring{b}) \in R$ eine Stammfunktion von (f,g) ist, d.h. es gilt $\operatorname{grad} U = (f,g)^T$ auf R.

b.) Berechnen Sie eine Stammfunktion $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ von

$$\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ye^{xy} \\ xe^{xy} + 2y \end{pmatrix}.$$

9.) **(4 Punkte)** Berechnen Sie die Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\text{a.)} \;\; y' = \frac{y^2}{x^2}, \quad y(x_0) = y_0 \quad (x_0 > 0) \qquad \text{sowie} \qquad \text{b.)} \;\; y' = 1 + y^2, \quad y(x_0) = y_0$$

unter Angabe des maximalen Definitionsintervalls.

10.) **(4 Punkte)** Berechnen Sie alle Lösungen des DGL-Systems $y' = J \cdot y$ im $\mathbb{R}^3$ mit einer Jordan-Matrix der Form

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})\,.$$

11.) **(4 Punkte)** Es sei $f : G \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann f lokal lipschitzstetig ist.

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis spätestens **Donnerstag, den 02. November 12:00 Uhr**, in die richtigen Briefkästen neben der Mathe/Info-Teilbibliothek.