Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Ralf Winkler

Würzburg, den 5. Februar 2007

11. Übung zur Analysis III

Wintersemester 2006/07

Lösungshinweise

50.) „⇒“ Ist f L-integrierbar über B, so sind definitionsgemäß f_+ und f_- integrierbar über B. Nach Satz 7.5.4 sind dann f_+ und f_- L-integrierbar über jeder Menge B_k mit

$$\int_B f_+(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{B_k} f_+(x)\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_B f_-(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{B_k} f_-(x)\,dx\,.$$

Wegen Aufgabe 48a.) (bzw. Skript) ist auch $|f|$ integrierbar auf B_k und wegen $|f| = f_+ + f_-$ ist

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{B_k} |f(x)|\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{B_k} (f_+(x)+f_-(x))\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{B_k} f_+(x)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{B_k} f_-(x)\,dx < \infty\,.$$

„⇐“ Ist f integrierbar über jeder Menge B_k und konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{B_k}|f(x)|\,dx$, so ist wegen der Monotonie des L-Integrals und dem Majorantenkriterium

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{B_k} f_+(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{\infty}\int_{B_k} |f(x)|\,dx < \infty \quad \text{und ebenso} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\int_{B_k} f_-(x)\,dx < \infty\,.$$

Nach Satz 7.5.4 existieren dann

$$\int_B f_-(x)\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_B f_+(x)\,dx$$

und f ist nach Definition integrierbar über B.

Es ist

$$\begin{aligned}\int_B f(x)\,dx &= \int_B f_+(x)\,dx - \int_B f_-(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{B_i} f_+(x)\,dx - \sum_{k=1}^{\infty}\int_{B_i} f_-(x)\,dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{B_i} (f_+(x) - f_-(x))\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{B_i} f(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

51.) Wir zeigen zunächst das folgende Lemma: Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $f : A \to \mathbb{R}^n$ global Lipschitz-stetig auf A mit Lipschitz-Konstanten $L > 0$. Dann gilt mit einer Konstanten $K(L,n) > 0$

$$\bar{\lambda}(f[A]) \le K(n,L)\bar{\lambda}[A].$$

Beweis: Wir betrachten zunächst nur den nicht-leeren Schnitt $A \cap W$ mit einem Würfel $W \subset \mathbb{R}^n$ mit Mittelpunkt x_0 und Kantenlänge $r > 0$. Für $x \in A \cap W \subset$ ist $|f(x) - f(x_0)| \le L|x - x_0|$. Wegen

$$|x - x_0| = \sqrt{n \cdot \frac{r^2}{4}} = \frac{\sqrt{n}}{2}r$$

ist also $|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\sqrt{n}}{2} Lr$ für $x \in A \cap W$. Folglich ist $f[A \cap W]$ in der Menge $U_{\frac{\sqrt{n}}{2}Lr}(f(x_0))$ enthalten und mit der Monotonie des äußeren Maßes folgt dann

$$\bar{\lambda}(f[A \cap W]) \leq \tilde{K}(n, L) \cdot r^n \leq K(n, L) \cdot \bar{\lambda}[W] .$$

Für $\epsilon > 0$ sei nun $A \subset T$ mit einer abzählbaren Würfelsumme $T = \bigcup_{j=1}^{\infty} W_j$ und $|T| \leq \bar{\lambda}(A) + \epsilon$. Dann ist mit Hilfe des eben Gezeigten

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(f[A]) &= \bar{\lambda}\left(f\left[\bigcup_{j=1}^{\infty} W_j \cap A\right]\right) = \bar{\lambda}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} f[W_j \cap A]\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\lambda}(f[W_j \cap A]) \leq K(n, L) \cdot |T| \leq K(n, L) \cdot |A| + K(n, L) \cdot \epsilon , \end{aligned}$$

woraus wegen der Beliebigkeit von ϵ die Behauptung folgt.

$\square$

Als offene Menge lässt sich U darstellen in der Form $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bar{Q}_j$ mit kompakten Quadern $\bar{Q}_j \subset U$, auf denen wegen $f \in C^1(U)$ eine globale Lipschitzkonstante L_j existiert. Es sei $M_j := \bar{Q}_j \cap M$ und damit $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$. Da für alle $j \in \mathbb{N}$ die Menge M_j ebenfalls Nullmenge ist, gilt nach dem vorangegangenen Lemma

$$\bar{\lambda}(f[M_j]) \leq K(n, L_j) \cdot \bar{\lambda}(M_j) = 0 .$$

Also ist $f[M_j]$ Nullmenge und folglich auch

$$f[M] = f\left[\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j\right] = \bigcup_{j=1}^{\infty} f[M_j]$$

als eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen.