Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Ralf Winkler

Würzburg, den 13. Dezember 2006

7. Übung zur Analysis III

Wintersemester 2006/07

Lösungshinweise

30.) a.) Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\mu(C_k) = \underline{\mu}(C_k) \leq \underline{\mu}(M) \leq \overline{\mu}(M) \leq \overline{\mu}(D_k) = \mu(D_k) = \mu(C_k \cup D_k \setminus C_k) \overset{\text{Aufg. 29}}{=} \mu(C_k) + \mu(D_k \setminus C_k)\,.$$

Wegen $\mu(D_k \setminus C_k) \to 0$ ist $\overline{\mu}(M) - \underline{\mu}(M) < \epsilon$ für alle $\epsilon > 0$, folglich $\overline{\mu}(M) = \underline{\mu}(M)$, woraus die Messbarkeit von M folgt.

b.) Es sei $\epsilon > 0$ gegeben. Aufgrund der Messbarkeit von B gibt es Quadersummen

$$S = \bigcup_{j=1}^{p} S_j \qquad \text{und} \qquad T = \bigcup_{i=1}^{q} T_i$$

mit $S \subset B \subset T$ und $|T| - |S| < \frac{\epsilon}{r^n}$ und nichtentarteten, der bekannten Disjunktheitseigenschaft genügenden Quadern S_j $(j = 1, \ldots, r)$ und T_j $(j = 1, \ldots, q)$. Zu rB sind

$$rS = \bigcup_{j=1}^{p} rS_j \qquad \text{und} \qquad rT = \bigcup_{i=1}^{q} rS_i$$

Quadersummen mit $rS \subset rB \subset rT$. Es ist

$$|rS| = \sum_{j=1}^{p} |rS_j| = \sum_{j=1}^{p} r^n\,|S_j| = r^n\,|S| \qquad \text{und analog} \qquad |rT| = r^n\,|T|.$$

Folglich ist $|rT| - |rS| = r^n|T| - r^n|S| = r^n(|T| - |S|) < \epsilon$, was die J-Messbarkeit von rB zeigt. Darüber hinaus ist

$$\begin{aligned} \mu(rB) = \underline{\mu}(rB) &= \sup\{|\tilde{S}| : \tilde{S} \text{ Quadersumme mit } \tilde{S} \subset rB\} \\ &= \sup\{|rS| : S \text{ Quadersumme mit } S \subset B\} \\ &= \sup\{r^n|S| : S \text{ Quadersumme mit } S \subset B\} = r^n\underline{\mu}(B) = r^n\mu(B)\,. \end{aligned}$$

31.) a.) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ ist mit der euklidischen Norm $|\cdot|$ und der dazu äquivalenten Operatornorm $\|\cdot\|$:

$$\left|\frac{1}{k!}A^k x^k\right| \leq c \cdot \left\|\frac{1}{k!}A^k x^k\right\| \leq \frac{c}{k!}\left\|A^k x^k\right\| = \frac{c}{k!}|x|^k\,\|A^k\| \overset{\text{Submult.}}{\leq} \frac{c}{k!}|x|^k \cdot \|A\|^k\,.$$

Da die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c}{k!}|x|^k\,\|A\|^k = c \cdot e^{|x|\|A\|}$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, folgt nach dem Majorantenkriterium die Konvergenz von e^{Ax}.

b.) Es sei a_{ij} der Eintrag von A und allgemein $a_{ij}^{(k)}$ der Eintrag von A^k in der i.ten Zeile und j.ten Spalte. Die Konvergenz von e^{Ax} bzgl. $\|\cdot\|$ bzw. $|\cdot|$ impliziert die komponentenweise Konvergenz, d.h. für $i, j = 1, \ldots, m$ ist

$$Y_{ij}(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(k)}}{k!} x^k$$

eine auf ganz $\mathbb{R}$ konvergente Potenzreihe und kann folglich gliedwiese differenziert werden. Es ist dann

$$\frac{d}{dx} Y_{ij}(x) \;=\; \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(k)}}{k!} x^k\right) \;=\; \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(k)}}{(k-1)!} x^{k-1}\right) \;=\; \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(k+1)}}{k!} x^k\right).$$

Andererseits ist auch

$$[AY(x)]_{ij} \;=\; \sum_{l=1}^{m} a_{il} Y_{lj}(x) \;=\; \sum_{l=1}^{m} a_{il} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{lj}^{(k)}}{k!} x^k}_{\text{konv.}} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{m} a_{il} \frac{a_{lj}^{(k)}}{k!} x^k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(k+1)}}{k!} x^k\,,$$

was die Übereinstimmung von Y' und AY zeigt.

c.) Es ist $x \mapsto Y(x)y_0$ die Lösung des AWPs $y' = Ay$; $y(0) = y_0$. Denn es ist, wenn $Y_i(x)$ die i.te Spalte von $Y(x)$ bezeichnet:

$$\frac{d}{dx}\,[Y(x)y_0] \;=\; \frac{d}{dx} \sum_{i=1}^{m} Y_i(x) y_0^{(i)} \;=\; \sum_{i=1}^{m} Y_i'(x) y_0^{(i)} \;\overset{b.)}{=}\; \sum_{i=1}^{m} AY_i(x) y_0^{(i)} \;=\; A\,[Y(x)y_0]$$

und ferner

$$Y(0)y_0 \;=\; E_m y_0 \;=\; y_0\,.$$