Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Ralf Winkler

Würzburg, den 8. November 2006

4. Übung zur Analysis III

Wintersemester 2006/07

Lösungshinweise

17.) Es sei $A := \begin{pmatrix} 9 & -5 & -3 \\ 14 & -8 & -5 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom $\lambda \mapsto \chi_A(\lambda)$ berechnet sich dann zu

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -5 & -3 \\ 14 & -8-\lambda & -5 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1\,.$$

Durch Raten erhalten wir eine Nullstelle $\lambda_1 = 1$ von χ_A. Mittels Polynomdivision errechnen wir

$$(-\lambda + \lambda^2 + \lambda - 1) : (\lambda - 1) = -\lambda^2 + 1 = (1-\lambda)(1+\lambda)\,,$$

so dass wir insgesamt die Faktorisierung

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2$$

und daraus die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ sowie $\lambda_2 = -1$ erhalten. Für den Eigenraum E_{-1} zum EW $\lambda_1 = -1$ gilt $\dim\ker E_{-1} = 1$ und

$$E_{-1} = \ker \begin{pmatrix} 10 & -5 & -3 \\ 14 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ferner gilt für den Eigenraum E_1 zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$

$$E_1 = \ker \begin{pmatrix} 8 & -5 & -3 \\ 14 & -9 & -5 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{insbesondere also } \dim\ker E_1 = 1 < 2.$$

Einen Hauptvektor v zum EW $\lambda_2 = 1$ erhalten wir als Lösung des LGS

$$(A - 1\cdot E)x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 8 & -5 & -3 \\ 14 & -9 & -5 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beispielsweise können wir wählen $v = (2,3,0)^T$. Damit erhalten wir eine Darstellung

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = TAT^{-1}$$

mit der Transformationsmatrix $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Genau dann ist nun $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ ein Fundamentalsystem der homogenen DGL $y' = Ay$, wenn $\{TY_1, TY_2, TY_3\}$ ein Fundamentalsystem des transformierten Systems $z' = Jz$ darstellt. (Umgekehrt ist dann $Y_i := T^{-1}Z_i$ für $i = 1,2,3$.) Wir bestimmen ein Fundamentalsystem zur homogenen Gleichung $z' = Jz$. Wir schreiben ausführlich

$$z_3' = -z_3, \quad z_2' = z_2 \qquad \text{und} \qquad z_1' = z_1 + z_2\,,$$

woraus wir unmittelbar

$$z_3(x) = c_1 e^{-x}, \quad z_2(x) = c_2 e^x$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ erhalten. Eine homogene Lösung der DGL $z_1' = z_1 + z_2 = z_1 + c_2 e^x$ erhalten wir sofort zu $z_{1;\mathrm{hom}} = c_3 e^x$. Etwa durch Variation der Konstanten erhalten wir (nach kurzer Rechnung) in $c_2 x \cdot e^x$ eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL, also ist $z_1(x) = c_3 e^x + c_2 x \cdot e^x$ mit $c_3 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der DGL $z_1' = z_1 + c_2 e^x$. Indem wir setzen

$$1.) \quad c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 1, \qquad 2.) \quad c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 0 \qquad \text{und} \qquad 3.) \quad c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = 0$$

erhalten wir drei Lösungen

$$(Z_1(x), Z_2(x), Z_3(x)) \;=\; \left(\begin{pmatrix} e^x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xe^x \\ e^x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-x} \end{pmatrix} \right).$$

Durch Transformation $Y_i = TZ_i$ erhalten wir dann mit

$$Y(x) \;=\; \begin{pmatrix} e^x & xe^x + 2e^x & e^{-x} \\ e^x & xe^x + 3e^x & 2e^{-x} \\ e^x & xe^x & 0 \end{pmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix des homogenen Systems $y' = Ay$. Eine spezielle Lösung $Y_{\mathrm{inh.}}(x)$ der inhomogenen DGL gewinnt man beispielsweise durch die Formel

$$Y_{inh.}(x) \;=\; Y(x) \cdot \int Y^{-1}(x) \cdot \begin{pmatrix} 4e^{-x} \\ 9e^{-x} \\ -3e^{-x} \end{pmatrix} dx\,,$$

wobei $Y^{-1}(x) \cdot \begin{pmatrix} 4e^{-x} \\ 9e^{-x} \\ -3e^{-x} \end{pmatrix}$ die Lösung des LGS

$$\begin{pmatrix} e^x & xe^x + 2e^x & e^{-x} \\ e^x & xe^x + 3e^x & 2e^{-x} \\ e^x & xe^x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1(x) \\ w_2(x) \\ w_3(x) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 4e^{-x} \\ 9e^{-x} \\ -3e^{-x} \end{pmatrix}$$

darstellt. Nach kurzer Rechnung erhalten wir diese zu

$$Y^{-1}(x) \cdot \begin{pmatrix} 4e^{-x} \\ 9e^{-x} \\ -3e^{-x} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} w_1(x) \\ w_2(x) \\ w_3(x) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} e^{-2x}(-3-2x) \\ 2e^{-2x} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} Y_{inh.}(x) \;&=\; Y(x) \cdot \begin{pmatrix} \int e^{-2x}(-3-2x)\,dx \\ \int 2e^{-2x}\,dx \\ \int 3\,dx \end{pmatrix} \;=\; Y(x) \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^{-2x} + \int x \frac{d}{dx} e^{-2x}\,dx \\ -e^{-2x} \\ 3x \end{pmatrix} \\ &=\; Y(x) \cdot \begin{pmatrix} (2+x)e^{-2x} \\ -e^{-2x} \\ 3x \end{pmatrix} \;=\; \ldots \;=\; e^{-x} \begin{pmatrix} 3x \\ 6x-1 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Folglich erhalten wir nach Satz 6.4.3.a die allgemeine Lösung der gegebenen DGL zu

$$Y(x) \;=\; \begin{pmatrix} e^x & xe^x + 2e^x & e^{-x} \\ e^x & xe^x + 3e^x & 2e^{-x} \\ e^x & xe^x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \;+\; e^{-x} \begin{pmatrix} 3x \\ 6x-1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$