Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Ralf Winkler

Würzburg, den 2. November 2006

2. Übung zur Analysis III

Wintersemester 2006/07

Lösungshinweise

8.) a.) Aus der stetigen Diff'barkeit von g und der Stetigkeit von f folgt

$$U_x(x,y) = f(x,\mathring{b}) + \int_{\mathring{b}}^{y} g_x(x,\eta)\,d\eta \qquad \text{und} \qquad U_y(x,y) = g(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}$. Aus der Integrabilitätsbedingung $f_y = g_x$ erhalten wir dann mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für $(x,y) \in R$:

$$U_x(x,y) = f(x,\mathring{b}) + \int_{\mathring{b}}^{y} f_y(x,\eta)\,d\eta \;=\; f(x,\mathring{b}) + f(x,y) - f(x,\mathring{b}) = f(x,y)\,,$$

womit die Behauptung insgesamt gezeigt ist.

b.) Für jedes beliebige nichtentartete Rechteck R des $\mathbb{R}^2$ mit $(\mathring{a},\mathring{b}) = (0,0) \in R$ ist nach a.) die Funktion $U : R \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$U(x,y) = \int_0^y (xe^{x\eta} + 2\eta)\,d\eta \;=\; e^{x\eta}|_0^y \;=\; e^{xy} - 1 + y^2$$

eine Stammfunktion von $(f,g)^T$. Da dies für jedes Rechteck $R \subset \mathbb{R}^2$ mit $(0,0) \in R$ gilt, stellt somit U eine Stammfunktion von $(f,g)^T$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ dar.

9.) a.) Gegeben ist das Problem

$$y' = \underbrace{y^2}_{=:g(y)} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{=:f(x)}\,, \quad J_1 := \mathbb{R}^+,\ J_2 := \mathbb{R} \qquad y(x_0) = y_0\,,$$

also $f \in C^0(J_1)$, $g \in C^0(J_2)$.

Falls $g(y_0) = 0$, also $y_0 = 0$, so ist nach Satz 6.2.2 $y \equiv 0$ eine Lösung auf $J_1 = \mathbb{R}^+$.

Falls $y_0 \neq 0$, so besitzt jede in einem Intervall $I \subset \mathbb{R}^+$ um x_0 definierte Lösung die eindeutige Gestalt

$$y(x) = G^{-1}(F(x))$$

wobei

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{t^2} \;=\; -\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0}$$

und

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{s^2}\,ds \;=\; -\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0} \quad\Rightarrow\quad G^{-1}(z) = \frac{y_0}{1 - zy_0} \quad (z \in G[\mathbb{R}\backslash\{0\}])\,,$$

also

$$y(x) = \frac{y_0}{1 - (-\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0})y_0} \;=\; \frac{y_0}{1 - \frac{y_0}{x_0} + \frac{y_0}{x}}\,. \tag{1}$$

Die partikulären Lösungen durch die Punkte (x_0, y_0) mit $x_0 = y_0$ besitzen damit die Gestalt

$$y(x) = x$$

und sind folglich auf ganz J_1 definiert. Für $x_0 \neq y_0$ besitzt die jeweilige Lösungskurve einen Pol bei $x = \frac{x_0 y_0}{y_0 - x_0}$. In Abhängigkeit von x_0 ist also die Lösung (1) maximal definiert auf

$$\begin{cases} \mathbb{R}^+ & \text{falls } \frac{x_0 y_0}{y_0 - x_0} < 0 \\ ]0, \frac{x_0 y_0}{y_0 - x_0}[& \text{falls } x_0 < \frac{x_0 y_0}{y_0 - x_0} \\ ]\frac{x_0 y_0}{y_0 - x_0}, \infty[& \text{falls } \frac{x_0 y_0}{y_0 - x_0} < x_0 \,. \end{cases}$$

Wir müssen noch zeigen, dass im Falle $y_0 = 0$ die Lösung $y \equiv 0$ auch eindeutig bestimmt ist: Lokal ist dies der Fall, denn die Funktion $(x, y) \mapsto \frac{y^2}{x^2}$ ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, insbesondere ist sie dort lokal lipschitzstetig, woraus nach Picard-Lindelöf die lokale Eindeutigkeit folgt, also $y \equiv 0$ in einer Umgebung von x_0. Insbesondere ist sie auf einem Intervall konstant. Gäbe es eine weitere Lösung z durch $(x_0, 0)$ mit $z \neq 0$, so besäße deren Graph einen Punkt $(\mathring{x}, \mathring{y})$ mit $\mathring{y} \neq 0$. In diesem Fall würde z die Gestalt (1) aufweisen. Diese Funktionen besitzen jedoch allesamt keine nichttrivialen Intervalle, auf denen sie konstant sind.

b.) Gegeben ist das Problem

$$y' = g(y) := 1 + y^2$$

also in der Terminologie von Satz 6.2.2:

$$f \equiv 1,\ J_1 := \mathbb{R},\ J_2 := \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f \in C^0(J_1),\ g \in C^0(J_2)$$

Zum Anfangswertpaar (x_0, y_0) besitzt jede in einem Intervall um x_0 definierte Lösung die eindeutige Gestalt

$$y(x) = G^{-1}(F(x))$$

mit

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} dt = x - x_0$$

und

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{1+s^2}\, ds = \operatorname{Arctan}(y) - \operatorname{Arctan}(y_0) \qquad \Rightarrow \qquad G^{-1}(z) = \tan(z + \operatorname{Arctan}(y_0))\,,$$

also folglich

$$y(x) = \tan(x - (x_0 - \operatorname{Arctan}(y_0)))\,,$$

womit das maximale Lösungsintervall gegeben ist durch

$$]x_0 - \operatorname{Arctan}(y_0) - \frac{\pi}{2},\ x_0 - \operatorname{Arctan}(y_0) + \frac{\pi}{2}[\,.$$