Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Christian Lageman, Martin Lamprecht, Ralf Winkler

Würzburg, den 19. Juli 2006

12. Übung zur Analysis II

Sommersemester 2006
Lösungshinweise

57.) a.) Es ist $f(x,y) = y^x = e^{x\log y}$ und folglich $\partial_x f(x,y) = e^{x\log y}\cdot \log y$ sowie $\partial_y f(x,y) = e^{x\log y}\cdot \frac{x}{y}$. Die Tangentialebene von f im Punkt $(1,1)$ entspricht dem Taylorpolynom $T_1\,|_{(1,1)}$, gegeben durch

$$T_1\,|_{(1,1)}(x,y) \;=\; f(1,1) \,+\, \partial_x f(1,1)\cdot(x-1) \,+\, \partial_y f(1,1)\cdot(y-1) \;=\; 1 + 1(y-1) \;=\; y\,.$$

b.) Es ist $\partial_{xx} f(x,y) = \log^2 y\, e^{x\log y}$ und $\partial_{yy} f(x,y) \;=\; e^{x\log y}\cdot\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y^2}\cdot e^{x\log y}$ sowie

$$\partial_{xy} f(x,y) \;=\; \partial_{yx} f(x,y) \;=\; e^{x\log y}\,\frac{1}{y} \,+\, \log y\, e^{x\log y}\,\frac{x}{y}\,,$$

so dass die Hesse-Matrix in $(1,1)$ gegeben ist durch

$$H_f(1,1) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} T_2\,|_{(1,1)}(x,y) \quad &= \quad T_1\,|_{(1,1)}(x,y) \,+\, \frac{1}{2}(x-1,y-1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \\ &= \quad y \,+\, \frac{1}{2}(x-1,y-1)^T\begin{pmatrix} y-1 \\ x-1 \end{pmatrix} \\ &= \quad y \,+\, \frac{1}{2}\left((x-1)(y-1) + (y-1)(x-1)\right) \;=\; 1 - x + xy\,. \end{aligned}$$

c.) Es ist $T_1\,|_{(1,1)}(1.01, 0.99) \;=\; 0.99$ und $T_2\,|_{(1,1)}(1.01, 0.99) \;=\; 1 - 1.01 + 1.01\cdot 0.99 \;=\; 0.9899$. Ein Taschenrechner liefert für $f(1.01, 0.99) = 0.99^{1.01}$ den Näherungswert 0.9899005.

58.) a.) Als lokale Extrema kommen lediglich höchstens die Punkte (x,y) in Frage mit $\partial_x f(x,y) = 2x - 2y = 0$ und $\partial_y f(x,y) = 2y - 2x = 0$, d.h. alle Punkte (x,x) mit $x \in \mathbb{R}$. Wegen

$$\partial_{xx} f(x,y) = 2 = \partial_{yy} f(x,y) \quad \text{und} \quad \partial_{xy} f(x,y) \;=\; \partial_{yx} f(x,y) \;=\; -2$$

ist die Hesse-Matrix in diesen Punkten gegeben durch

$$H_f \;=\; \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

Diese ist nicht regulär, besitzt also den EW $\lambda = 0$ und ist folglich nur semidefinit. Eine Aussage über das Vorliegen lokaler Extrema in den Punkten (x,x), $(x \in \mathbb{R})$ ist somit mit Hilfe der Hesse-Matrix nicht möglich. Jedoch wird wegen

$$f(x,y) \;=\; x^2 + y^2 - 2xy + 1 \;=\; (x-y)^2 + 1 \;\geq\; 1 \tag{1}$$

deutlich, dass es sich bei diesen Punkten um absolute (und damit auch um lokale) Minima handelt. Ebenfalls wird aus (1) ersichtlich, dass es kein absolutes Maximum geben kann (man wähle (x,y) so, dass $f(x,y) \geq M$ für eine beliebig vorgegebene Schranke $M > 0$).

b.) Für ein lokales Extremum in der offenen Menge D muss gelten

$$\partial_x f(x,y) = \cos x \,+\, \cos(x+y) \,=\, 0 \qquad \text{und} \qquad \partial_y f(x,y) = \cos y \,+\, \cos(x+y) \,=\, 0\,.$$

Notwendigerweise folgt daraus $\cos x = \cos y$ und $\cos x \,=\, -\cos(x+y)$. Aufgrund der Injektivität des Cosinus auf $]0, \frac{\pi}{2}[$ folgt also $x = y$ und ferner $\cos x = -\cos 2x$ bzw.

$$x \,=\, \operatorname{Arccos}(-\cos 2x) \,=\, \pi - \operatorname{Arccos}(\cos 2x) \,=\, \pi - 2x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{3}\,.$$

Es ist noch zu zeigen, dass $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ tatsächlich ein stationärer Punkt ist. Wir bestätigen durch Einsetzen:

$$\partial_x f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \,=\, \partial_y f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \,=\, \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} \,=\, 0\,.$$

Es ist ferner

$$\partial_{xx} f(x,y) = -\sin x - \sin(x+y), \quad \partial_{yy} f(x,y) = -\sin y - \sin(x+y)$$

sowie

$$\partial_{xy} f(x,y) \,=\, \partial_{yx} f(x,y) \,=\, -\sin(x+y)\,.$$

Folglich ist die Hesse-Matrix in $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ gegeben durch

$$H_f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \,=\, \begin{pmatrix} -\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ -\sin\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} \,=\, -\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von $-H_f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ ist gegeben durch

$$\chi_{-H_f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)}(\lambda) \,=\, (\sqrt{3}-\lambda)^2 - \frac{3}{4}\,,$$

woraus sich für die Matrix $-H_f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ die Eigenwerte $\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ und $\frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ ergeben. Folglich ist $H_f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ negativ definit und es liegt in $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ ein lokales Maximum vor.

59.) (Man verdeutliche sich die Menge D durch eine kleine Skizze.) Auf der kompakten Menge D besitzt f sowohl ein absolutes Minimum als auch ein absolutes Maximum. Lägen diese im Inneren von D, so müsste gelten

$$\partial_x f(x,y) \,=\, 2x \,=\, 0 \qquad , \qquad \partial_y f(x,y) \,=\, -2y \,=\, 0\,,$$

so dass hierfür nur der Ursprung als Extremum in Frage kommt. Wegen

$$\partial_{xx} f(x,y) = 2,\ \partial_{yy} f(x,y) = -2,\ \partial_{xy} f(x,y) \,=\, \partial_{yx} f(x,y) \,=\, 0$$

ist die Hesse-Matrix

$$H_f(x,y) \,=\, H_f(0,0) \,=\, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

indefinit. Somit liegt in $(0,0)$ **kein** Extremum vor.

Absolutes Minimum und Maximum müssen also auf dem Rand von D angenommen werden. Der größte Wert auf dem Rand ∂D und damit auch auf D wird in den Punkten $(1,0)$ und $(-1,0)$ angenommen mit $M := \max_{\partial D} f(x,y) \,=\, 1$. Das absolute Minimum $m = \min_{\partial D} f(x,y) \,=\, -1$ von f auf D wird angenommen in $(0,1)$ und $(0,-1)$.

60.) Es ist für $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) \,=\, \sum_{i=1}^{r} |x - a_i|^2 \,=\, \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} (x_j - a_{ij})^2\,,$$

wobei a_{ij} die j.te Komponente des Punktes a_i bezeichne. Jedes Extremum der unendlich oft differenzierbaren Fumktion f liegt im Inneren der offenen Menge $\mathbb{R}^2$. Für einen stationären Punkt ist es notwendig und hinreichend, dass

$$\forall_{k=1,\ldots,n} \quad 0 \,=\, \partial_{x_k} f(x) \,=\, \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} \delta_{jk}\, 2\,(x_j - a_{ij}) \,=\, 2\sum_{i=1}^{r} (x_k - a_{ik})\,,$$

was genau dann der Fall ist, wenn

$$\forall_{k=1,\ldots,n} \quad 0 \;=\; \sum_{i=1}^{r}(x_k - a_{ik}) \;=\; r x_k - \sum_{i=1}^{r} a_{ik} \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall_{k=1,\ldots,n} \quad x_k \;=\; \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} a_{ik}\,.$$

Es gibt also höchstens ein Extremum von f in $\mathbb{R}^2$. Dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt, erkennen wir mit Hilfe der Hesse-Matrix. Es ist

$$\forall_{i,k=1,\ldots,n} \quad \partial_{x_i}\partial_{x_k} f(x) \;=\; 2r\delta_{ik}\,.$$

Somit ist die Hesse-Matrix gegeben durch

$$H_f(x,y) \;\equiv\; \mathrm{diag}(2r,\ldots,2r)$$

woraus sich die positive Definitheit ergibt (alle Eigenwerte sind gleich $2r > 0$). Nach Kriterium 5.3.2 liegt somit im oben berechneten stationären Punkt

$$\frac{1}{r}\left(\sum_{i=1}^{r} a_{i1},\ldots,\sum_{i=1}^{r} a_{in}\right)$$

ein lokales Minimum vor.

61.) Beispielsweise ist

$$\Delta : G \to \mathbb{R}^n,\; \Delta(x) \;=\; \begin{cases} a + R(x)\cdot \frac{x-\mathring{x}}{|x-\mathring{x}|^2} & \text{für } x \neq \mathring{x} \\ a & \text{für } x = \mathring{x} \end{cases}$$

eine solche Funktion, denn es gilt

$$\begin{aligned} f(\mathring{x}) + \langle \Delta(x), x-\mathring{x}\rangle \;&=\; f(\mathring{x}) + \;<a, x-\mathring{x}>\; + \left\langle \frac{R(x)}{|x-\mathring{x}|^2}x-\mathring{x},\, x-\mathring{x}\right\rangle \\ &=\; f(\mathring{x}) + \;<a, x-\mathring{x}>\; + R(x) \;=\; f(x) \end{aligned}$$

und

$$\lim_{x\to\mathring{x}} \Delta(x) \;=\; \lim_{x\to\mathring{x}} \left(a \;+\; \underbrace{\frac{R(x)}{|x-\mathring{x}|}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{x-\mathring{x}}{|x-\mathring{x}|}}_{\text{beschr.}} \right) \;=\; a \;=\; \Delta(\mathring{x})\,.$$