Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Christian Lageman, Martin Lamprecht, Ralf Winkler

Würzburg, den 5. Juli 2006

9. Übung zur Analysis II

Sommersemester 2006
Lösungshinweise

44.) Es ist

$$l = \int_0^{2\pi} \left| \begin{pmatrix} 1-\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \right| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1-2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t}\, dt\,.$$

Für $t \in [0,\pi]$ berechnen wir mit Hilfe der Substitution

$$t(u) := \operatorname{Arccos} u, \quad \Rightarrow \quad dt = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du\,. \tag{1}$$

$$\int \sqrt{2-2\cos t}\, dt = -\int \frac{\sqrt{2-2u}}{\sqrt{1-u^2}}\, du = -\sqrt{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+u}}\, du = -2\sqrt{2}\,(\cos t + 1)^{1/2}\,,$$

Um die formale Rechnung in (1) zu rechtfertigen, machen wir die Probe:

$$\frac{d}{dt}\left(-2\sqrt{2}(\cos t+1)^{\frac{1}{2}}\right) = -2\sqrt{2}\frac{1}{2}\frac{-\sin t}{\sqrt{\cos t + 1}} \overset{t\in[0,\pi]}{=} \sqrt{2}\frac{\sqrt{1+\cos t}\sqrt{1-\cos t}}{\sqrt{1+\cos t}} = \sqrt{2-2\cos t}\,.$$

also

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t}\, dt \overset{\text{Symm.}}{=} 2\int_0^{\pi} \sqrt{2-2\cos t}\, dt = 2\left[-2\sqrt{2}\,(\cos t+1)^{1/2}\right]_0^{\pi} = -2\cdot(-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}) = 8\,.$$

(Alternative: Verwende $2-2\cos t = 2-2\cos(2\cdot\frac{t}{2})$, ... Additionstheorem ...)

46.) Für jede Zerlegung Z von $[0,1]$ ist $\underline{R}_f(Z) = 0$, da sich in jedem nichttrivialen Teilintervall von $[0,1]$ irrationale Zahlen befinden. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die rationalen Zahlen

$$0, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$$

genau die Stellen, an welchen f die Werte $\frac{1}{1}, \ldots, \frac{1}{n}$ annimmt. Es handelt sich dabei um höchstens

$$1+1+2+\ \ldots\ + n-1 = 1 + \frac{1}{2}(n-1)n$$

verschiedene Zahlen. um diese Zahlen legen wir Intervalle der Breite $\frac{1}{n^3}$ und verringern diese Länge gegegbenenfalls noch, falls sich die Intervalle schneiden sollten. Die Gesamtheit der linken und rechten Intervallgrenzen in $[0,1]$, nach aufsteigender Größe geordnet, und erweitert um die Werte 0 und 1 definiert dann eine Zerlegung $Z_n = \{y_0, \ldots, y_N\}$ von $[0,1]$ mit

$$\overline{R}_f(Z_n) = \sum_{i=1}^{N}(y_i - y_{i-1}) \sup_{[y_{i-1},y_i]} f(x) \le (1+\frac{1}{2}(n-1)n)\cdot\frac{1}{n^3}\cdot 1 + 1\cdot\frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Somit ist $\inf\limits_{Z \text{ Zerl.}} \overline{R}_f(Z_n) = 0$ und f ist R-integrierbar mit $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Die Funktion g ist monoton und folglich integrierbar. Ihr Integral berechnet sich zu $\int_0^1 g(x)\,dx = 1$, was dem Integral der Funktion entspricht, die an der einzigen Stelle 0 zu $\tilde{g}(0) := 1$ abgeändert wurde.

Jedoch ist

$$x \mapsto (g \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & : \quad x \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap [0,1] \end{cases}$$

als Dirichlet-Funktion **nicht** R-integrierbar.