



Würzburg, den 12. Juni 2006

5. Übung zur Analysis II

Sommersemester 2006

Lösungshinweise

21.) a,b.) Es ist

$$\operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}.$$

Diese Reihe konvergiert genau für $|x^2| < 1$, besitzt also insbesondere den Konvergenzradius $R = 1$. Gliedweises Integrieren liefert

$$\operatorname{Arctan}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + c.$$

Wegen $0 = \operatorname{Arctan} 0 \stackrel{!}{=} 0 + c$ folgt $c = 0$. Nach Satz 4.3.6 und 4.3.8 besitzt diese Reihe ebenfalls den Konvergenzradius $R = 1$. Setzen wir $x = \pm 1$ in die Reihe ein, so erhalten wir die Reihen

$$\pm \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1},$$

welche nach dem Leibniz-Kriterium konvergieren.

Es ist

$$\operatorname{Artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}.$$

Ihr Konvergenzradius ist wieder $R = 1$ (geom. Reihe). Gliedweises Integrieren liefert

$$\operatorname{Artanh}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1},$$

da sich die Integrationskonstante wie oben zu $c = 0$ berechnet. Für den Konvergenzradius ergibt sich (Argumentation analog zu oben) ebenfalls $R = 1$. Für $x = \pm 1$ haben wir die Reihen

$$\pm \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}.$$

Diese divergieren nach dem Minorantenkriterium. Beispielsweise für $x = 1$ ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} > \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Es ist

$$\operatorname{Arcsin}'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-x^2)^k \stackrel{A.17}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} x^{2k}.$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für den Konvergenzradius dieser Reihe (wie auch der integrierten Reihe) $R = 1$ gilt. Es ist ferner durch gliedweises Integrieren

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \frac{1}{2k+1} \binom{2k}{k} x^{2k+1} + c,$$

wobei sich wegen $0 = \operatorname{Arcsin}(0) \stackrel{!}{=} 0 + c$ wieder $c = 0$ ergibt. Für $x = \pm 1$ erhalten wir die Reihen

$$\pm \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \frac{1}{2k+1} \binom{2k}{k}.$$

Es genügt, die Reihe mit „+“ auf Konvergenz zu untersuchen. Zum einen ist die Folge der Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{2k}} \frac{1}{2k+1} \binom{2k}{k} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

(streng) monoton steigend. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist zudem

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{2k}} \frac{1}{2k+1} \binom{2k}{k} &= \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{2k}} \frac{1}{2k+1} \binom{2k}{k} x^{2k+1} \\ &\stackrel{x > 0}{\leq} \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \frac{1}{2k+1} \binom{2k}{k} x^{2k+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{Arcsin}(x) = \operatorname{Arcsin} 1. \end{aligned}$$

Nach dem Monotoniekriterium für Folgen (Satz 2.2.6) ist somit die Reihe konvergent.

Es ist

$$\operatorname{Arsinh}'(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (x^2)^k \stackrel{\text{aus A.17}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \binom{2k}{k} x^{2k}.$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für den Konvergenzradius dieser Reihe (wie auch der integrierten Reihe) $R = 1$ gilt. Es ist ferner durch gliedweises Integrieren

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{2k}{k} x^{2k+1} + c$$

wobei sich wegen $0 = \operatorname{Arsinh} 0 \stackrel{!}{=} 0 + c$ wieder $c = 0$ ergibt. Für $x = \pm 1$ erhalten wir die Reihen

$$\pm \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \frac{1}{2k+1} \binom{2k}{k}.$$

Diese besitzen einen Grenzwert, da sie (wie bei der Arcsin-Reihe) gezeigt, sogar absolut konvergieren.

- c.) Konvergiert die Reihe wie beispielsweise im Falle von Arctan und Arcsin auch auf dem Rand des Konvergenzintervalls, so ist sie als Funktion von x nach dem Abelschen Grenzwertsatz dort auch stetig. Somit gilt

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{Arctan}(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

und auch

$$\frac{\pi}{2} = \operatorname{Arcsin}(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{Arcsin}(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k}.$$

- 22.) a.) Es ist mit wiederholter partieller Integration

$$\begin{aligned} \int x^3 \sin x \, dx &= \int x^3 (-\cos x)' \, dx = \int 3x^2 \cos x \, dx - x^3 \cos x \\ &= \int 3x^2 (\sin x)' \, dx - x^3 \cos x = - \int 6x \sin x \, dx + 3x^2 \sin x - x^3 \cos x \\ &= \int 6x (\cos x)' \, dx + 3x^2 \sin x - x^3 \cos x \\ &= - \int 6 \cos x \, dx + 6x \cos x + 3x^2 \sin x - x^3 \cos x \\ &= \sin x (3x^2 - 6) + \cos x (6x - x^3) + c. \end{aligned}$$

- b.) Es ist $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(t) = \log t$ eine differenzierbare Bijektion mit $\forall_{t \in \mathbb{R}^+} \phi'(t) = \frac{1}{t} \neq 0$. Ferner ist

$$t \mapsto f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) = \frac{t+1}{t+\frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t} = \frac{t+1}{t^2+1}$$

als rationale Funktion unbestimmt integrierbar. Nach Satz 4.3.4b.) ist dann für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{e^x + 1}{e^x + e^{-x}} = \left| \int \frac{t+1}{t^2+1} dt \right|_{t=e^x}.$$

Wegen

$$\int \frac{t+1}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2+1} dt + \int \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \log(t^2+1) + \operatorname{Arctan}(t) + c$$

ist

$$\int \frac{e^x + 1}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{1}{2} \log(e^{2x} + 1) + \operatorname{Arctan}(e^x) + c.$$

- c.) Mit Hilfe einer Polynomdivision erkennen wir

$$\frac{x^5 + x^4 + 2x^2 + 5}{(x+1)^2(x^2+x+1)} = \frac{x^5 + x^4 + 2x^2 + 5}{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1} = x - 2 + \frac{2x^3 + 7x^2 + 5x + 7}{(x+1)^2(x^2+x+1)}. \quad (1)$$

Wir multiplizieren den Ansatz

$$\frac{2x^3 + 7x^2 + 5x + 7}{(x+1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

mit $(x+1)^2(x^2+x+1)$ und erhalten

$$2x^3 + 7x^2 + 5x + 7 = A(x+1)(x^2+x+1) + B(x^2+x+1) + (Cx+D)(x+1)^2.$$

Ausmultiplizieren und Sortieren nach Potenzen von x führt nach Koeffizientenvergleich auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A + C &= 2 \\ 2A + B + 2C + D &= 7 \\ 2A + B + C + 2D &= 5 \\ A + B + D &= 7 \end{aligned}$$

welches die eindeutige Lösung $A = 4$, $B = 7$, $C = -2$, $D = -4$ besitzt. Somit berechnen wir das unbestimmte Integral von (1) zu

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + 4 \int \frac{1}{x+1} dx + 7 \int \frac{1}{(x+1)^2} dx - \int \frac{2x+4}{x^2+x+1} dx.$$

Im Einzelnen erhalten wir mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Stammfunktionen:

$$\begin{aligned} 4 \int \frac{1}{x+1} dx &= 4 \log|x+1| + c \\ 7 \int \frac{1}{(x+1)^2} dx &= -\frac{7}{x+1} + c \\ - \int \frac{2x+4}{x^2+x+1} dx &= - \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - 3 \int \frac{1}{x^2+x+1} dx \\ &= -\log|x^2+x+1| - 2\sqrt{3}\operatorname{Arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir als unbestimmtes Integral von (1) die Funktionen

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + 4 \log|x+1| - \frac{7}{x+1} - \log|x^2+x+1| - 2\sqrt{3}\operatorname{Arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$$

23.) a.) Es sei $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f . Dann ist für alle $x \in I$

$$S(x) = F(h(x)) - F(g(x)),$$

also wegen $F' = f$:

$$S'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x))g'(x).$$

b₁.) Für $|x| < 1$ besitzt die Funktion $x \mapsto \log(1+x^2)$ eine Potenzreihendarstellung und nach Satz 4.3.6 somit auch eine Stammfunktion F auf $|x| < 1$. Diese ist differenzierbar und folglich auch stetig, insbesondere stetig in $x_0 = 0$, so dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_{-2x^2}^{2x^2} \log(1+t^2) dt = \lim_{x \rightarrow 0} F(2x^2) - F(-2x^2) = 0.$$

Zusammen mit a.) und dem Satz von de l'Hospital gilt nun

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{-2x^2}^{2x^2} \log(1+t^2) dt}{x^6} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+4x^4)4x - \log(1+4x^4)(-4x)}{6x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x \log(1+4x^4)}{6x^5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x(4x^4 + o(x^7))}{6x^5} = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

b₂.) Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ besitzt die Funktion $x \mapsto \frac{\sin x}{x^3}$ eine Stammfunktion, denn

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x^3} &= \frac{1}{x^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-2}}{(2k+1)!} \\ &= \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\text{besitzt Stammfkt. } -\frac{1}{x} + c} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-2}}{(2k+1)!}}_{\text{Potenzreihe mit Konv.radius } R = \infty}. \end{aligned}$$

Insbesondere bilden für jedes Intervall I , welches die Null nicht enthält, die Funktionen $g(x) = x$ und $h(x) = 2x$ auf ein Intervall ab, auf welchem $t \mapsto \frac{\sin t}{t^3}$ eine Stammfunktion besitzt. Jede Stammfunktion der obigen Potenzreihe ist eine differenzierbare und insbesondere stetige Funktion auf ganz $\mathbb{R}$. Für eine solche Funktion F ist also $\lim_{x \rightarrow 0} F(2x) - F(x) = 0$. Zusammen also ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^3} dt = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2x} + F(2x) + \frac{1}{x} - F(x) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} = \infty.$$

Wir können somit wieder de l'Hospital anwenden und erhalten zusammen mit a.):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^3} dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^3} dt}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \frac{\sin 2x}{8x^3} - \frac{\sin x}{x^3}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \frac{1}{4} \sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

24.) Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$p'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 5, \quad p''(x) = 12x^2 - 12x, \quad p'''(x) = 24x - 12, \quad p^{(4)}(x) = 24, \quad p^{(5)}(x) = 0.$$

und daher

$$p'(1) = 3, \quad p''(1) = 0, \quad p'''(1) = 12, \quad p^{(4)}(1) = 24, \quad p^{(5)}(1) = 0,$$

so dass sich $T_4|_1$ berechnet zu

$$T_4|_1(x) = \sum_{k=0}^4 \frac{1}{k!} p^{(k)}(1)(x-1)^k = 3 + 3(x-1) + 2(x-1)^3 + (x-1)^4.$$

Dass dieses Polynom mit p übereinstimmt, sieht man beispielsweise mit dem Restglied von Lagrange, welches wegen $f^{(5)} \equiv 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ verschwindet. Ohne dieses Hilfsmittel lässt sich die Gleichheit durch Ausmultiplizieren zeigen. Es ist nämlich

$$3 + 3(x-1) + 2(x-1)^3 + (x-1)^4 = 3 + 3x - 3 + 2(1x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + (1x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) = p(x).$$

25.) Für $k \leq p$ ist mit Satz 4.1.4b.)

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= q^{(k)}(x) + \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{d^j}{dx^j} (x - x_0)^p g^{(k-j)}(x) \\ &= q^{(k)}(x) + \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} p \cdot \dots \cdot (p - j + 1) (x - x_0)^{p-j} g^{(k-j)}(x), \end{aligned}$$

also insbesondere $f^{(k)}(x_0) = q^{(k)}(x_0)$ für $k < p$ und auch

$$f^{(p)}(x_0) = q^{(p)}(x_0) + p! \cdot g(x_0) = q^{(p)}(x_0).$$

Wegen $f^{(k)}(x_0) = T_p|_{x_0}^{(k)}(x_0)$ für alle $k = 1, \dots, p$ gilt somit für

$$s(x) := T_p|_{x_0}(x + x_0) - q(x + x_0),$$

dass

$$s^{(k)}(0) = 0 \quad \text{für alle } k = 0, \dots, p. \quad (2)$$

Dabei ist s mit

$$s(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p$$

ein Polynom vom Grad $\leq p$, und es berechnet sich a_t ($1 \leq t \leq p$) mit (2) zu

$$a_t = \frac{s^{(t)}(0)}{t!} = 0.$$

Folglich ist $s(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit auch $T_p|_{x_0}(x) = q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.