Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Christian Lageman, Martin Lamprecht, Ralf Winkler

Würzburg, den 29. Mai 2006

3. Übung zur Analysis II

Sommersemester 2006
Lösungshinweise

11.) Es ist

$$\begin{aligned}
\cosh iz &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iz)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-iz)^k}{k!}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k z^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k i^k z^k}{k!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k} z^{2k}}{(2k)!} = \cos z
\end{aligned}$$

und ebenso

$$\sinh iz = \frac{1}{2}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k z^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k i^k z^k}{k!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k+1} z^{2k+1}}{(2k+1)!} = i \cdot \sin z$$

bzw. $\sin z = \frac{1}{i}\sinh(iz)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\tan z &= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\frac{\sinh(iz)}{\cosh(iz)} = -i\,\tanh(iz) \overset{\text{Aufg. 7}}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-i}{(2k)!}B_{2k}2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)(iz)^{2k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}B_{2k}2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)z^{2k-1} = \ldots = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \ldots
\end{aligned}$$