JULIUS-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT WÜRZBURG
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Prof. Dr. H. Pabel
Christian Lageman, Martin Lamprecht, Ralf Winkler

Würzburg, den 10. Mai 2006

1. Übung zur Analysis II

Sommersemester 2006
Lösungshinweise

5.) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ besitzt den Konvergenzradius $\frac{1}{2}$, was man beispielsweise durch

$$\forall_{k\in\mathbb{N}}: \qquad \sqrt[k]{|a_k|} \le \sqrt[k]{\frac{1}{3}2^k + \frac{2}{3}2^k} = 2$$

und andererseits wegen $\frac{2}{3} \le \frac{1}{6}2^k$ für $k \ge 2$ und somit

$$\forall_{k\in\mathbb{N}}: \qquad \sqrt[k]{|a_k|} \ge \sqrt[k]{\frac{1}{3}2^k - \frac{2}{3}} \ge \sqrt[k]{\frac{1}{3}2^k - \frac{1}{6}2^k} = \sqrt[k]{\frac{1}{6}}\,\sqrt[k]{2^k} \to 2$$

bestätigen kann. Wir müssen noch zeigen, dass sie mit f übereinstimmt. Es ist für $|x| < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
&(1-x-2x^2)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\
=\;& \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} - 2\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} \\
=\;& a_0 + a_1 x - a_0 x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k+1} - 2\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} \\
=\;& a_0 + (a_1 - a_0)x + \sum_{k=2}^{\infty} (a_k - a_{k-1} - 2a_{k-2})x^k
\end{aligned}$$

Wegen

$$a_0 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \qquad \text{und} \qquad a_1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$$

sowie für $k \ge 2$:

$$\begin{aligned}
a_k - a_{k-1} - 2a_{k-2} &= \frac{1}{3}2^k + \frac{2}{3}(-1)^k - \frac{1}{3}2^{k-1} - \frac{2}{3}(-1)^{k-1} - \frac{2}{3}2^{k-2} - \frac{4}{3}(-1)^{k-2} \\
&= 2^{k-2}\left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) + (-1)^{k-2}\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\right) = 0
\end{aligned}$$

ist der letzte Ausdruck gleich $(1-x)$, was nach Division durch $1 - x - 2x^2$ die Übereinstimmung der Potenzreihe mit der Funktion f beweist.

40.) Es sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir betrachten ein $s_0 \in D$ und zeigen, dass $\sum_{k=1}^{\infty}$ auf $[s_0, \infty[$ gleichmäßig konvergiert: Es existiert dabei ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{s_0}} < \epsilon\,.$$

Somit gilt für alle $n \geq N$ und alle $s \in [s_0, \infty[$

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^s} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^s} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{s_0}} < \epsilon \, .$$

Die Folge $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^s} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert daher auf $[s_0, \infty[$ gleichmäßig gegen die Zetafunktion. Diese ist somit stetig auf $[s_0, \infty[$. Da s_0 beliebig war ist sie folglich stetig auf der ganzen offenen Menge D.