Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. H. Pabel
PD Dr. Oliver Roth, Dr. Daniela Kraus, Ralf Winkler

Würzburg, den 14. November 2005

4. Übung zur Analysis I

Wintersemester 2005/06

13.) Zeigen Sie: In einem totalgeordneten Körper K sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a.) Jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge von K besitzt ein Supremum (in K).

b.) Zu nicht-leeren Mengen $A, B \subset K$ mit $A \cup B = K$ und $\forall_{a\in A} \forall_{b\in B}\ a < b$ existiert eine Zahl $s \in K$ mit

$$\forall_{a\in A} \forall_{b\in B} \quad a \leq s \leq b\,.$$

14.) Es seien X und Y nichtleere beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a.) $\sup(X \cup Y) = \max\{\sup X, \sup Y\}$.

b.) Gilt $X \cap Y \neq \emptyset$, so ist $\sup(X \cap Y) \leq \min\{\sup X, \sup Y\}$.

c.) Ist $\inf X > 0$, so besteht für das Infimum und Supremum der Menge

$$Z = \{z \in \mathbb{R} \,|\, z = x^{-1},\, x \in X\}$$

der Zusammenhang: $\sup(Z) = (\inf X)^{-1}$.

15.) a.) Bestimmen Sie, falls vorhanden, (in $\mathbb{R}$) das Supremum, Maximum, Minimum und Infimum der Mengen

$$A = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \,|\, n, m \in \mathbb{N}, m \geq n\right\} \qquad , \qquad B = \left\{(-1)^n \frac{n}{n+2005} \,|\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

b.) Es sei $a_0 := 3$ sowie $a_1 := \frac{7}{3}$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei rekursiv definiert:

$$a_{n+2} := \frac{1}{18} a_n + \frac{1}{6} a_{n+1} + \frac{14}{9}\,.$$

Zeigen Sie die Existenz von $\inf a[\mathbb{N}_0]$ sowie $\sup a[\mathbb{N}_0]$ und bestimmen Sie diese.

16.) Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ sowie reelle Zahlen $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{n-1} \leq a_n$ gegeben. Zeigen Sie:

a.)

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1\right) \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i \geq n\,.$$

b.) Es gilt die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\,.$$

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis spätestens **Mittwoch, den 23. November, 12:00 Uhr**, in die richtigen Briefkästen neben der Mathe/Info-Teilbibliothek.