JULIUS-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT WÜRZBURG
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. H. Pabel
PD Dr. Oliver Roth, Dr. Daniela Kraus, Ralf Winkler

Würzburg, den 12. Dezember 2005

7. Übung zur Analysis I

Wintersemester 2005/06
Lösungshinweise

23c.) Es sei $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}$. Dann ist $m := \min\limits_{n \in \mathbb{N}} \{|x-n|\} > 0$ und alle Zahlen im Intervall $U_{\frac{m}{2}}(x) = \left(x - \frac{m}{2}, x + \frac{m}{2}\right)$ liegen in $\mathbb{R} \backslash \mathbb{N}$. Somit ist das Komplement von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ offen und $\mathbb{N}$ demzufolge abgeschlossen. $\mathbb{N}$ ist nicht offen, denn für $n \in \mathbb{N}$ liegt in jeder Umgebung $(n-a, n+a)$ für $m > \frac{1}{a}$ eine Zahl $n + \frac{1}{m} \notin \mathbb{N}$.

Zur Untersuchung von $\mathbb{Q}$ zeigen wir zunächst, dass zwischen zwei rationalen Zahlen p_1, p_2 mit $p_1 < p_2$ eine irrationale Zahl liegt. Nachdem wir p_1 und p_2 auf den gleichen Hauptnenner gebracht haben, ist

$$p_1 = \frac{z_1}{N} < \frac{z_2}{N} = p_2$$

mit $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N}$. Für die Zahl $a := \frac{z_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{N}$ gilt wegen $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ und $z_2 \geq z_1 + 1$:

$$p_1 = \frac{z_1}{N} < a < \frac{z_2}{N} = p_2 \,.$$

Ferner ist a irrational, denn andernfalls würde aus $a = \frac{z_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{N} = \frac{p_1}{p_2}$ mit $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ durch Auflösen nach $\sqrt{2}$ folgen, dass auch $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Widerspruch.

Zu jedem $q \in \mathbb{Q}$ liegen in jeder Umgebung $U_\epsilon(q)$ die reellen Zahlen q und $q - \frac{\epsilon}{2}$, zwischen denen nach Satz 1.2.4 wieder eine rationale Zahl $p < q$ liegt. Nach dem gerade Gezeigten gibt es dann zwischen p und q eine irrationale Zahl $a \in U_\epsilon(q)$. Somit ist Q nicht offen.

Betrachten wir andererseits $a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Dann liegen in jeder Umgebung $U_\epsilon(a)$ die rellen Zahlen a und $a - \frac{\epsilon}{2}$, zwischen denen nach Satz 1.2.4 eine rationale Zahl $\in U_\epsilon(a)$ liegt. Somit ist auch $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ nicht offen und daher $\mathbb{Q}$ nicht abgeschlossen.

Zu $a \in (0,1)$ sei $N := \max\{n \in \mathbb{N} \,|\, n < \frac{1}{a}\}$. Dann gilt $N < \frac{1}{a}$ und $N + 1 \geq \frac{1}{a}$, bzw. $\frac{1}{N+1} \leq a < \frac{1}{N}$, bzw. $a \in [\frac{1}{N+1}, \frac{1}{N}[$, bzw. $a \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$. Ersichtlich ist auch $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[\subset (0,1)$ und damit $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[= (0,1)$, was die Offenheit von M_3 impliziert. Es ist $\mathbb{R} \backslash M_3 = \mathbb{R}_0^- \cup \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 1\}$ nicht offen, denn in jeder Umgebung von $1 \in \mathbb{R} \backslash M_3$ liegen Punkte aus M_3. Somit ist M_3 nicht abgeschlossen.

Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. H. Pabel
PD Dr. Oliver Roth, Dr. Daniela Kraus, Ralf Winkler

Würzburg, den 22. Dezember 2005

7. Übung zur Analysis I

Wintersemester 2005/06
Lösungshinweise

25.) a.) Es sei $x \in \mathbb{R}^n \backslash \bar{A}$, d.h. $x \in \mathbb{R}^n \backslash A$ und $x \notin \partial A$. Wegen $x \notin \partial A$ gibt es eine Umgebung $U(x)$, in welcher entweder nur Punkte aus A oder nur Punkte aus $\mathbb{R}^n \backslash A$ liegen. Die erste Alternative entfällt, da $x \in \mathbb{R}^n \backslash A$. Damit ist $U(x) \subset \mathbb{R}^n \backslash A$. Ersichtlich liegen in $U(x)$ keine weiteren Randpunkte, denn andernfalls gäbe es wegen der Offenheit von $U(x)$ zu einem Randpunkt $y \in U(x)$ eine kleine Umgebung $U_\epsilon(y) \subset U(x)$, in welcher sowohl Punkte aus A als auch aus $\mathbb{R}^n \backslash A$ liegen, im Widerspruch zu oben. Also ist sogar $U(x) \subset \mathbb{R}^n \backslash \bar{A}$ und $\mathbb{R}^n \backslash \bar{A}$ ist offen, bzw. $\bar{A}$ ist abgeschlossen.

b.) Sei $x \in \mathrm{Hp}(A)$. Für beliebiges $\epsilon > 0$ liegt in $U_\epsilon(x)$ ein Punkt $x_1 \in A \backslash \{x\}$. Zu jedem bereits konstruierten $x_k \in A \backslash \{x\}$ findet sich, da $x \in \mathrm{Hp}(A)$, ein weiterer Punkt $x_{k+1} \neq x_k$ aus $A \backslash \{x\}$ in der Umgebung $U_{\frac{|x_k - x|}{2}}(x)$.

c.) Wir zeigen zunächst, dass $\partial A \subset A \cup \mathrm{Hp}(A)$. Es sei dazu $x \in \partial A$. Falls $x \in A$, so ist nichts mehr zu zeigen. Im anderen Fall $x \notin A$ betrachten wir eine beliebige Umgebung $U(x)$ von x. Wegen $x \in \partial A$ gibt es in $U(x)$ einen Punkt $y \in A$, sogar $y \in A \backslash \{x\}$, da $A \ni y \neq x \notin A$. Also ist $x \in \mathrm{Hp}(A)$, was ebenfalls die Inklusion impliziert. Somit ist $A \cup \partial A \subset A \cup \mathrm{Hp}(A)$.
Wir zeigen nun, dass $\mathrm{Hp}(A) \subset A \cup \partial A$. Es sei dazu $x \in \mathrm{Hp}(A)$. Falls $x \in A$, so ist die Behauptung bewiesen. Falls $x \in \mathbb{R}^n \backslash A$ so betrachten wir eine Umgebung $U(x)$ von x. Wegen $x \in \mathrm{Hp}(A)$ gibt es in $U(x)$ einen Punkt $y \in A \backslash \{x\}$. Neben einem Punkt aus $\mathbb{R}^n \backslash A$ (nämlich x selbst) gibt es in $U(x)$ somit auch einen Punkt $y \in A$. Damit ist $x \in \partial A$ und insgesamt gilt $A \cup \mathrm{Hp}(A) \subset A \cup \partial A$.
Beide Inklusionen ergeben nun die zu beweisende Gleichheit.